Poznámky a příklady. *1. (borelovská σ-algebra) Nejmenší σ-algebra obsahující otevřené (uzavřené) množiny.*

2. (integrál vzhledem k obecné míře) Je-li (X, Σ, μ) prostor s mírou, definujeme (pro funkce $f : X \to \mathbb{R}$) jejich integrál vzhledem k μ následovně:

- *nejdříve definujeme tzv. jednoduché funkce $\sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{A_n}$, kde $A_1, \dots, A_N \in \Sigma$ a $c_1, \dots, c_N \geq 0$. Integrál z jednoduchých funkcí definujeme jako $\sum_{n=1}^{N} c_n \mu(A_n)$.*
- *měřitelné funkce definujeme jako:*

$$f \text{ měřitelná} \iff \forall t \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, t)) \in \Sigma$$

- *pro nezáporné měřitelné funkce definujeme*

$$\int f = \sup \left\{ \int s : \quad 0 \leq s \leq f \text{ s.v. } s \text{ jednoduchá} \right\}$$

  pro obecné f pak $\int f = \int f^+ - \int f^-$, pokud má pravá strana smysl.

3. Je-li $f \in \mathcal{M}_d$, potom pro $t \in \mathbb{R}$ platí $f^{-1}((-\infty, t)) \in \Lambda_d$.

Lemma 1 (subaditivita Lebesgueovy míry)**.** *Je-li $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posloupnost množin z Λ_d, potom*

$$\lambda_d \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_d (A_n) .$$

Lemma 2 (o nulovosti integrálu)**.** *Je-li $f \in \mathcal{M}_d$, $f \geq 0$ s.v. a $\int f = 0$, potom $f = 0$ s.v.*